

ДИНАМИКА СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА И МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ¹

Аннотация. На основе метода Рейнольдса и принципа максимума энтропии анализируется поведение одномерных случайно возмущенных систем, динамика которых описывается уравнением Ферхюльста. Рассматривается интерпретация с точки зрения моделей возмущенного осциллятора с затуханием и кинетической модели численности населения. К уравнению Ферхюльста применяется метод Рейнольдса. Полученные усредненные уравнения замыкаются при помощи метода максимальной энтропии. Выведен закон сохранения удельной энтропии. Проанализирована устойчивость стационарной точки усредненной модели. Получено аналитическое решение усредненной модели Ферхюльста. Выявлены общие особенности динамики на основе аналитического решения усредненной системы уравнений. Получено, что динамика уравнения Ферхюльста существенным образом зависит от величины дисперсии шума. При небольших значениях этого параметра модель в среднем эволюционирует вблизи значения, которое удовлетворяет невозмущенному уравнению Ферхюльста. Было показано, что все состояния с ненулевыми дисперсиями оказываются неустойчивыми в общем случае уже в первом порядке теории возмущений, что означает, что очень быстро они переходят в первоначальное невозмущенное состояние. Показано, что аналитическое решение является устойчивым по Ляпунову.

Ключевые слова: случайно возмущенное уравнение Ферхюльста, метод Рейнольдса, метод максимальной энтропии.

V. M. Zhuravlev, P. P. Mironov

DYNAMICS OF RANDOM-DISTURBED VERHULST EQUATION AND THE METHOD OF MAXIMUM ENTROPY

Abstract. The article analyzes the behavior of one-dimensional random-disturbed systems the dynamics of which is described by the Verhulst equation. The analysis is carried out on the basis of the Reynolds method and the maximum entropy principle. The authors consider interpretation from the point of view of models of the disturbed oscillator with attenuation and kinetic model of population. The Reynolds method is applied to Verhulst equation. The received average equations are isolated with the help of the maximum entropy method. The researchers establish a conservation law of specific entropy. The stability of station point of an average model is analysed. The analytical solution of average Verhulst model is obtained. The authors reveal general features of dynamics on the basis of analytical solution of an average system of equations. It is obtained that the dynamics of Verhulst equation essentially depends on the value of noise dispersion. For small dispersions the model on the av-

¹ Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы» и «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», а также работ в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1894.2011, гранта для аспирантов Ульяновского государственного университета и при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00747-а).

erage evolves near the value that satisfies the undisturbed Verhulst equation. It is shown that all conditions with nonzero dispersions are unstable generally already in the first order of the theory of perturbations, which means that they rapidly turn to the initial undisturbed condition. It is also shown that the analytical solution is stable according to Lyapunov.

Key words: random-disturbed Verhulst equation, Reynolds method, maximum entropy method.

Введение

Уравнение Ферхюльста (логистическое уравнение) является хорошо исследованным во всех отношениях уравнением, описывающим динамику численности популяций [1]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 + q + \varepsilon. \quad (1)$$

В рамках биофизической интерпретации этой модели в этом уравнении x – число особей какого-либо сообщества (ареала, планеты, государства, города, района и т.д.) в определенный момент времени. Параметры α , β описывают рождаемость в сообществе (параметр α) и степень самодействия популяции за счет эффекта тесноты (параметр β), параметр q описывает внешний детерминированный приток жителей в популяцию. Функция времени $\varepsilon(t)$ является случайной с математическим ожиданием, равным нулю: $\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$. Параметр α может иметь произвольный знак, а параметр β будем считать неотрицательным.

Другим типом модели, которая позволяет использовать случайно возмущенное уравнение Ферхюльста для описания своего поведения, является модель осциллятора с затуханием, собственная частота колебаний которого испытывает случайные возмущения с нулевым средним. Эта модель имеет следующий вид:

$$\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + (\omega^2 + \tau)\zeta = 0.$$

Здесь $\zeta = \zeta(t)$ – координата осциллятора; ω – невозмущенная собственная частота колебаний; γ – коэффициент затухания; $\tau = \tau(t)$ – случайные возмущения частоты. Эта модель преобразуется к модели (1) подстановкой $x = \dot{\zeta}/\zeta$. Величина $x = \dot{\zeta}/\zeta$ представляет собой скорость экспоненциального роста или убывания амплитуды колебаний. При этом $\alpha = -2\gamma$, $\beta = 1$, $q = -\omega^2$, $\varepsilon = -\tau$. Если полагать, что $q = -\omega^2 = \text{const}$, то уравнение (1) простым преобразованием $x' = x - x_0$ приводится к виду с $q = 0$. При этом параметр α преобразуется по формуле $\tilde{\alpha} = \alpha - 2\beta x_0$, где x_0 находится как решение уравнения

$$q - \beta x_0^2 + \alpha x_0 = 0.$$

Это уравнение имеет два вещественных корня

$$X_0^{(1)} = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4q\beta})/2\beta, \quad X_0^{(2)} = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4q\beta})/2\beta$$

в случае, если $\alpha^2 + 4q\beta \geq 0$.

Для модели осциллятора это означает, что $\omega^2 \leq \gamma^2$, т.е. собственная частота осциллятора меньше коэффициента затухания. Если это условие не выполняется, то корни уравнения являются комплексными и преобразование приводит к комплексной модели Ферхюльста, что выходит за рамки данной работы. Поэтому в данной работе мы будем исследовать случай, когда x_0 является вещественным и в уравнении (1) можно полагать $q = 0$.

С точки зрения идеологии кинетических моделей [1] внутреннее содержание уравнения Ферхюльста является простым и ясным, что дает основание использовать его для моделирования реальных систем. Однако, поскольку модель является жесткой (см., например, [2]), применение ее на практике оказывается ограниченным, в частности, из-за неполной ясности с ее поведением при наличии случайного внешнего воздействия. Такое воздействие всегда присутствует в реальных системах. При наличии внешнего случайного воздействия речь может идти лишь об описании динамики уравнения «в среднем» [3]. Однако при усреднении уравнения (1) полученная совокупность уравнений для моментов случайных величин уже оказывается незамкнутой, а при различных способах замыкания обладает различными свойствами, которые могут существенно отличаться от свойств исходной модели. В дальнейшем уравнение (1) будем называть случайно возмущенным уравнением, или СВ-уравнением.

В работах [4–7] был предложен метод исследования случайно возмущенных уравнений на основе анализа уравнений усредненной динамики по методу Рейнольдса с выводом условий замыкания уравнения Рейнольдса с помощью принципа максимума энтропии [8]. В работах [4, 6] этот метод применялся к одномерным механическим системам, в [5] – к уравнениям вязкой жидкости, а в [7] – к динамике двухвидовой популяции. Использование принципа максимума энтропии для вывода условий замыкания усредненных уравнений Рейнольдса основано на общей «термодинамической» идее, состоящей в том, что состояния с максимальной энтропией должны быть максимально устойчивыми [8]. Однако, хотя такая гипотеза и является очень правдоподобной, для различных систем прямое ее доказательство представляет ряд сложностей. Для одномерных механических систем эта сложность состоит в том, что свойства «термодинамической» устойчивости смешиваются со свойствами устойчивости самой механической системы как таковой. Разделить их для уравнений усредненной динамики в этом случае оказывается невозможно. Даже если невозмущенная одномерная механическая система является устойчивой, например частица находится в потенциальной яме, то при наличии внешнего случайного воздействия с нулевой средней силой система может обмениваться энергией с окружающей средой, что может приводить к неконтролируемой потере устойчивости в среднем. Поэтому для демонстрации факта наличия «термодинамической» устойчивости усредненных систем необходимо иметь простую модель, для которой эффекты, специфичные для механических систем, не имеют существенного значения. На роль такой модели подходит уравнение Ферхюльста.

Целью настоящей работы являлось получить замкнутое описание усредненной динамики СВ-уравнения Ферхюльста с помощью принципа

максимума энтропии, доказать прямыми вычислениями устойчивость усредненных решений и исследовать их асимптотическое поведение. В начале кратко излагаются основные положения метода максимальной энтропии. Затем выводятся уравнения теории и закон сохранения удельной энтропии системы. Целью дальнейших построений является выяснение общих свойств полученных уравнений. В частности, исследуется устойчивость усредненной системы.

1. Метод Рейнольдса и усредненное уравнение Ферхюльста

Метод Рейнольдса основывается на представлении переменных модели в виде их разложения на среднее значение $X(t)$ и флуктуации x' : $x = X(t) + x'$, где $X(t) = \langle x \rangle$, $\langle x' \rangle = 0$. Усреднение « $\langle \rangle$ » переменных понимается везде как усреднение по ансамблю. Применяя такое усреднение к СВ-уравнению (1), получаем следующее усредненное уравнение:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta \langle x'^2 \rangle. \quad (2)$$

В это уравнение входит дисперсия флуктуаций $\langle x'^2 \rangle$, для которой необходимо дополнительно указать уравнение эволюции, которое не следует из исходного уравнения. В этом и состоит проблема замыкания систем усредненных уравнений Рейнольдса. В случае отсутствия шума ($\varepsilon \equiv 0$, $\langle x'^2 \rangle = 0$) имеются две стационарные точки:

$$X_0 = 0, \quad X_0 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3)$$

При наличии шума обе точки смещаются и их положение определяется усредненной динамикой уравнения, которую мы исследуем далее. В отсутствие же шума известное решение уравнения (1) представляет собой кривую, асимптотически стремящуюся к одной из стационарных точек (3).

На рис. 1 представлены решения СВ-уравнения, полученные численно с генераций квазислучайного шума. Для дальнейшего изложения важно отметить, что случайные возмущения в уравнении не приводят к систематическому отклонению параметров от невозмущенных решений. Это указывает на устойчивость этой модели по отношению к случайным воздействиям.

2. Принцип максимума энтропии для уравнения Ферхюльста и замкнутая система усредненных уравнений Рейнольдса

Для замыкания усредненного уравнения Рейнольдса воспользуемся методом максимальной энтропии, развитым в работах [4, 5]. Принцип максимума энтропии основывается на свойстве энтропии стохастических систем достигать своего максимума на множестве макросостояний, которые реализуются максимальным числом микросостояний [9]. Для его формулировки [6, 10] в случае непрерывных случайных процессов необходимо воспользоваться шенноновским определением энтропии в форме континуального интеграла по пространству случайных величин $X[t_0, t_1]$, которое в нашем случае можно представить в виде прямого произведения всех одномерных пространств $\mathbf{R}^1(t)$ вещественных чисел, соответствующих всевозможным значениям перемен-

ных $\{x(t)\}$, параметрически зависящих от $t \in [t_0, t_1]$. Энтропия в этом случае может быть записана в виде следующего континуального интеграла:

$$H_0 = - \int \rho(\{x\}[t_0, t_1]) \ln \rho(\{x\}[t_0, t_1]) DX[t_0, t_1]. \quad (4)$$

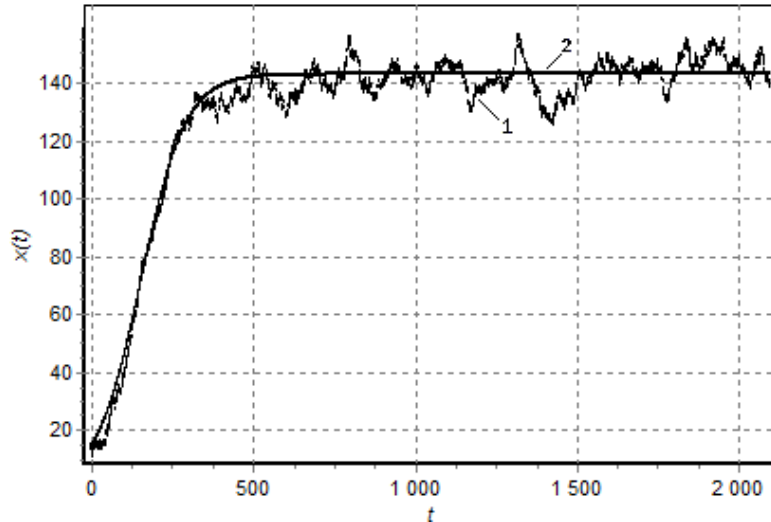


Рис. 1. Изменение $x(t)$ как функции времени при наличии шума (кривая 1) и без него (кривая 2). Параметры модели: $\alpha = 143$, $\beta = 1$, дисперсия случайного шума 10000. Стационарная точка 143

Здесь $\rho(\{x\}[t_0, t_1])$ – плотность вероятности совместного распределения случайных величин $\{x(t)\}$ на интервале времени $[t_0, t_1]$. Максимизация энтропии производится при условии, что матожидание $X(t)$ и второй момент $\langle x'^2 \rangle$ связаны уравнением (2).

Для вычисления максимального значения H_0 следует воспользоваться следующими основными фактами. Первый состоит в том, что поскольку уравнение (2) локально по времени, то по аналогии с конечномерными распределениями [10], распределения, максимизирующие H_0 , соответствуют условию независимости значений переменной $x'(t)$ в различные моменты времени:

$$\langle x'(t)x'(t') \rangle = \delta(t - t')\sigma_x^2(t),$$

где $\sigma_x^2(t)$ – некоторая функция t . Условие независимости означает, что континуальный интеграл (4) сводится на самом деле к континуальному произведению отдельных интегралов для каждого момента времени относительно каждого удельного распределения $\rho(x, t)$ для фиксированного момента времени t :

$$\rho(\{x\}[t_0, t_1]) = \prod_{t \in [t_0, t_1]} \rho(x'(t), t).$$

Это означает, что при отсутствии «патологий» в распределениях $\rho(x, t)$ выражение для энтропии в силу ее свойства иерархической аддитивности [10] можно представить в следующем виде:

$$H_0 = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{R(t)} \rho(x, t) \ln \rho(x, t) dx dt. \quad (5)$$

Второй факт состоит в том, что теперь задача отыскания максимума энтропии H_0 при условии выполнения уравнений (2) может быть решена стандартными средствами вариационного исчисления для функционала (5). Решения этой задачи в случае, если заданы первые и вторые моменты случайной величины, хорошо известны [9, 10] и сводятся к тому, что соответствующее удельное распределение $\rho(x, t)$ является нормальным распределением с заданными средними и вторыми моментами:

$$\rho(x, t) = \left(4\pi^2 \det C(t) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} X'^T C^{-1}(t) X' \right\}, \quad (6)$$

где $C(t)$ – матрица ковариаций одномерного векторного процесса $X' = \text{column}\{x'\}$: $C = \langle x'^2 \rangle$, операция T означает транспонирование так, что X'^T – вектор-строка: $X'^T = \{x'\}$.

Эти факты позволяют записать решение задачи об условном максимуме энтропии H_0 в следующем общем виде [10]:

$$H_{\max} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \ln \det C dt + C_0. \quad (7)$$

Здесь $\det C = \langle x'^2 \rangle$ – определитель матрицы ковариаций C флуктуаций x' , C_0 – несущественная числовая постоянная.

Поскольку $H_{\max}$ зависит от набора параметров $X, \langle x'^2 \rangle$, которые связаны одним уравнением, то среди всех распределений (6) можно найти те, которые дают максимум энтропии $H_{\max}$ при тех же условиях (2). Этот принцип, который может быть использован для всех систем, усредненные уравнения Рейнольдса для которых содержат моменты второго порядка, в дальнейшем будет называться принципом максимума энтропии. Заметим также, что этот результат, касающийся пока только нормальных удельных распределений, на самом деле может быть расширен на общий случай негауссовых распределений [4].

Следуя этому принципу максимума энтропии для описания усредненной динамики системы, мы должны решить задачу о максимуме функционала энтропии следующего вида:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \ln \det C dt + \int_{t_0}^{t_1} U(\dot{X} - \alpha X + \beta X^2 + \beta \langle x'^2 \rangle) dt. \quad (8)$$

Здесь $U(t)$ – множитель Лагранжа в задаче об условном экстремуме $H_{\max}$. Этот функционал фактически аналогичен функционалам принципа наименьшего действия в механике.

Уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала (8) имеют следующий вид:

$$\dot{X} = \alpha X - \beta X^2 - \beta Z, \quad \dot{U} = -\alpha U + 2\beta XU, \quad \frac{1}{2Z} + \beta U = 0. \quad (9)$$

Здесь и далее $Z = \langle x'^2 \rangle$ – дисперсия флуктуаций в системе.

Эта система допускает закон сохранения. Как и в механике, условия достижения функционалом S экстремума (здесь максимума) приводят к общему первому интегралу движения, аналогичному интегралу полной механической энергии. Аналогом энергии для функции Лагранжа L является следующая величина:

$$S(X, U, Z) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \dot{X} - L = -\frac{1}{2} \ln Z + U(\alpha X - \beta X^2 - \beta Z), \quad (10)$$

представляющая собой удельную энтропию распределения вероятностей. Вычисляя полную производную по времени от величины S на траекториях системы, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (11)$$

Этот закон сохранения можно представить в следующем виде:

$$Z = e^{S_0} \exp\{2U(\alpha X - \beta X^2 - \beta Z)\}. \quad (12)$$

Он позволяет анализировать глобальные свойства системы по характеру ее траекторий.

3. Стационарная точка и ее устойчивость

С точки зрения полезности развитого подхода важным является вопрос об устойчивости полученных уравнений по отношению к малым возмущениям. Для динамических систем важно найти стационарные точки и циклы и исследовать их устойчивость. Система (9) обладает одной стационарной точкой, координаты которой вычисляются из уравнений

$$\alpha X_0 - \beta X_0^2 - \beta Z_0 = 0, \quad -\alpha U_0 + 2\beta X_0 U_0 = 0, \quad \frac{1}{2Z_0} + \beta U_0 = 0. \quad (13)$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$X_0 = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U_0 = -\frac{2\beta}{\alpha^2}, \quad Z_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta^2}. \quad (14)$$

Для анализа устойчивости стационарной точки представим параметры модели (9) в следующем виде:

$$X = X_0 + \xi, \quad U = U_0 + u, \quad Z = Z_0 + z, \quad (15)$$

где X_0, U_0, Z_0 – значения, соответствующие стационарной точке, а ξ, u, z – возмущения, являющиеся функциями первого порядка малости. Уравнения для ξ, u, z имеют в линейном приближении следующий вид:

$$\dot{\xi} = \alpha\xi - 2\beta X_0\xi - \beta z, \quad \dot{u} = -\alpha u + 2\beta X_0u + 2\beta U_0\xi, \quad U_0z + Z_0u = 0. \quad (16)$$

В этом случае выполняется следующий закон сохранения:

$$\left[\frac{(-Z_0^3 + 5Z_0^2 + 2Z_0 + 4)}{(Z_0 + 1)^4} + \beta U_0 \right] z = (\alpha - 2\beta X_0) U_0 \xi + (\alpha X_0 - \beta X_0^2 - \beta Z_0) u.$$

Собственные числа системы (16) имеют следующий общий вид:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Среди этих собственных ненулевых значений всегда имеется корень с положительной вещественной частью. Следовательно, в линейном приближении стационарная точка системы является неустойчивой для всех параметров СВ-уравнения. Этот вывод подтверждается графиками численного решения системы (1), приведенными на рис. 1. Действительно, стационарная точка усредненной системы всегда лежит точно по середине между двумя стационарными точками невозмущенного уравнения со значениями 0 и α/β в фазовой плоскости. Кривая же возмущенного движения на рис. 1 совершает колебания вблизи стационарной точки невозмущенного движения.

4. Аналитическое решение усредненной системы уравнений

Выразим X из второго уравнения системы (9)

$$X = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \frac{1}{U} + \alpha \right) \frac{1}{2\beta} \quad (17)$$

и введем функцию $\theta = \theta(t)$ таким образом, что для X , U и Z выполняются следующие соотношения:

$$X = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{\theta}}{\theta} + \frac{\alpha}{2\beta}, \quad U = -C_1 \theta^2, \quad Z = \frac{1}{2\beta C_1 \theta^2}. \quad (18)$$

Заметим, что для осцилляторной интерпретации модели Ферхюльста ($\beta = 1$) функция $\theta = \theta(t)$ связана с усредненной координатой осциллятора $\langle \varsigma \rangle = W$ соотношением

$$W = \theta e^{\alpha t/2}.$$

Подставляя эти соотношения в (9), получаем уравнение для θ :

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta}{2C_1\theta^2} \right) \theta. \quad (19)$$

Из этого следует, что анализ всей усредненной системы (9) сводится к решению одного дифференциального уравнения (19). Интегрируя это уравнение, получаем

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\theta^2 - \frac{\beta}{C_1} \ln \theta + \frac{C_2}{4}}. \quad (20)$$

Здесь C_2 – постоянная интегрирования. В зависимости от параметров модели и постоянной интегрирования C_2 могут существовать такие значения $\theta = \theta(t)$, при которых подкоренное выражение становится мнимым. Это означает, что в области таких значений θ отсутствуют вещественные решения уравнения (19). В свою очередь это означает, что при таких параметрах модели и начальных условиях система не переходит в состояние с максимумом энтропии.

Проделявая аналогичные вычисления для уравнения (1) без шумов, получаем другое выражение:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\theta^2 + \frac{C_2}{4}}. \quad (21)$$

Типичные фазовые траектории уравнений (20) и (21) для различных значений параметра C_2 представлены на рис. 2. Сплошными линиями обозначены траектории усредненной системы, а пунктиром – траектории уравнения (1) без шума. Параметр C_2 определяет тип фазовой траектории системы. Как видно из рис. 2, существует критическое значение параметра C_2 , которое разделяет возможные траектории в усредненной системе по типу их асимптотического поведения. Таких областей четыре. На рисунке они обозначены римскими цифрами.

Траектории усредненной системы, соответствующие критическому значению параметра C_2 (на рис. 2 точка P_{cr}), разделяют всю фазовую плоскость (правую полуплоскость на рис. 2) на четыре области, в которых располагаются траектории четырех различных типов. В областях I и IV содержатся траектории системы, которые выходят из точек $\theta = +\infty, \dot{\theta} = -\infty$ (IV) и $\theta = 0, \dot{\theta} = +\infty$ (I) и при $t \rightarrow \infty$ стремятся к точке $\theta = 0, \dot{\theta} = -\infty$, что соответствует предельному значению $X(\infty) = -\infty$ и дисперсии $Z(\infty) = \sigma_x^2(\infty) = \infty$. В областях II и III содержатся траектории системы, которые при $t \rightarrow \infty$ стремятся к точке $\theta = \infty, \dot{\theta} = \infty$, что соответствует предельному значению $X(\infty) = \alpha/\beta$ и дисперсии $Z(\infty) = \sigma^2(\infty) = 0$. Это

означает, что, если в начальный момент времени наблюдаемые параметры системы $X(0)$ и $Z(0) = \sigma^2(0)$ таковы, что находятся в одной из областей I или IV, то система переходит в максимально хаотическое состояние. Если же начальные параметры лежат в областях II и III, то система переходит в детерминированное состояние.

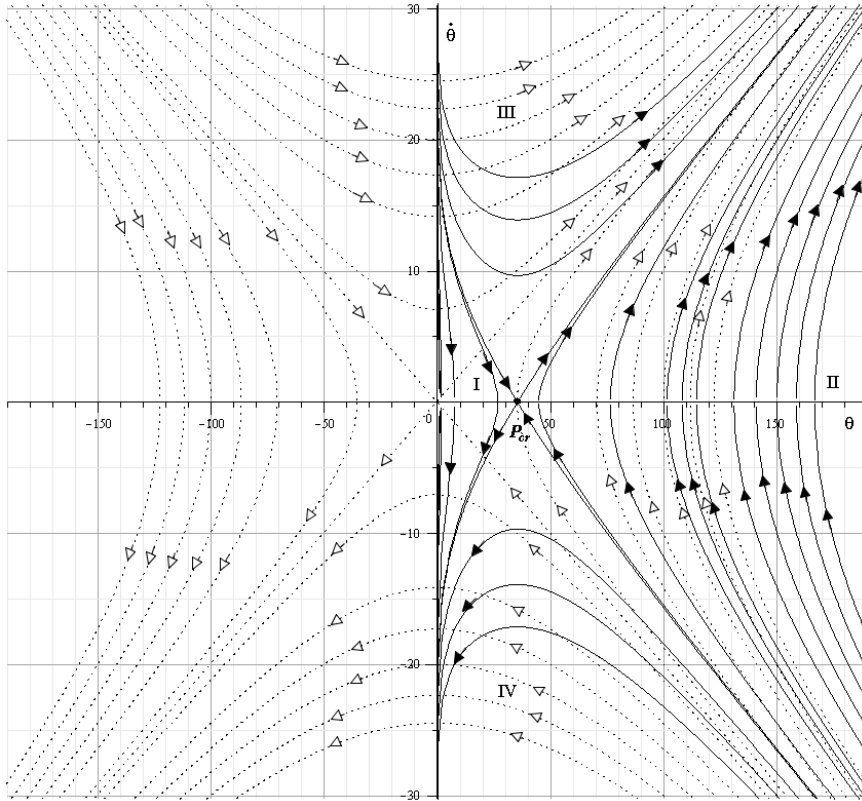


Рис. 2. Фазовый портрет уравнений (20) и (21) для различных значений параметра C_2 . Параметры модели: $\alpha = 0,4$, $\beta = 100$, $C_1 = 1$

Поскольку с точки зрения осцилляторной интерпретации модели Ферхюльста величина $x = \dot{\zeta}/\zeta$ представляет собой скорость экспоненциального роста или убывания амплитуды колебаний, то при $t \rightarrow \infty$ коэффициент затухания будет иметь следующий вид:

$$\gamma_{\infty}^{(k)} = 2\gamma - X_0^{(k)} = 2(-1)^k \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad k = 1, 2.$$

То есть амплитуда либо будет расти, либо убывать при $t \rightarrow \infty$. Случайные же флуктуации при этом будут вести себя в соответствии с диаграммой на рис. 2. Следовательно, внешний шум может приводить как к росту колебаний, так и к их затуханию. Эта ситуация относится, как это указывалось в первом разделе, только к случаю $\gamma \geq \omega$. Случай с частотой осциллятора большей, чем коэффициент затухания, требует отдельного анализа.

5. Анализ устойчивости аналитического решения усредненной системы уравнений

Для анализа устойчивости этого решения в линейном приближении представим усредненные переменные следующим образом:

$$X = \tilde{X}_0(t) + \xi, \quad U = \tilde{U}_0(t) + u, \quad Z = \tilde{Z}_0(t) + z, \quad (22)$$

где ξ, u, z – возмущения первого порядка малости. Подставляя (22) в систему уравнений (9), отбрасывая слагаемые квадратичные по возмущениям ξ, u, z и выражая в последнем уравнении z через u , получаем

$$\dot{\xi} = -2\frac{\dot{\theta}}{\theta}\xi - \frac{u}{2C_1^2\theta^4}, \quad \dot{u} = 2\frac{\dot{\theta}}{\theta}u - 2\beta C_1\theta^2\xi. \quad (23)$$

Для возмущения ξ из выражения для X_0 получаем

$$\xi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\dot{\psi}}{\theta} - \frac{\dot{\theta}}{\theta^2} \psi \right). \quad (24)$$

Здесь принималось, что $\theta = \theta(t) + \psi$, где ψ – также возмущение первого порядка малости. Учитывая это, получаем новую систему уравнений:

$$\ddot{\psi} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta}\psi - \frac{\beta u}{2C_1^2\theta^3}, \quad \dot{u} = 2\left(\frac{\dot{\theta}}{\theta}u - C_1\theta\dot{\psi} + C_1\dot{\theta}\psi\right). \quad (25)$$

Выражая u через ψ и учитывая (19), получаем следующее уравнение:

$$\ddot{\psi} - \left(\frac{\beta}{2C_1\theta^2} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \psi = 0. \quad (26)$$

Численный анализ (рис. 2, 3) показывает, что параметр θ , а следовательно, и $\theta^2(t)$ в областях II и III со временем стремится к бесконечности. Это означает, что в данном случае уравнение (26) принимает следующий приближенный вид:

$$\ddot{\psi} - \frac{\alpha^2}{4} \psi \approx 0. \quad (27)$$

Решение данного уравнения

$$\psi(t) = A \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) - B \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) \quad (28)$$

является неустойчивым по Ляпунову [11]. Подставляя полученное решение в выражение (24) для ξ , анализируя численное решение для $X(t)$ (рис. 4) и систему (23), получаем

$$\xi = \frac{\alpha B}{\beta\theta} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right), \quad u = -C_1\theta\psi(t), \quad z = -\frac{\psi(t)}{2\beta C_1\theta^3}. \quad (29)$$

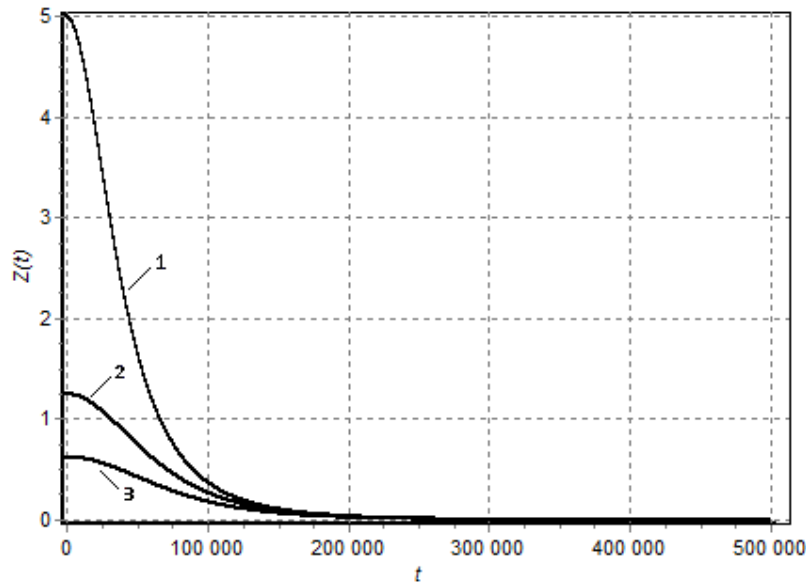


Рис. 3. Изменение $Z(t)$ как функции времени при различных значениях C_1 в областях II и III. Параметры модели: $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,1$, $C_1 = 1$ (1), $C_1 = 4$ (2), $C_1 = 8$ (3)

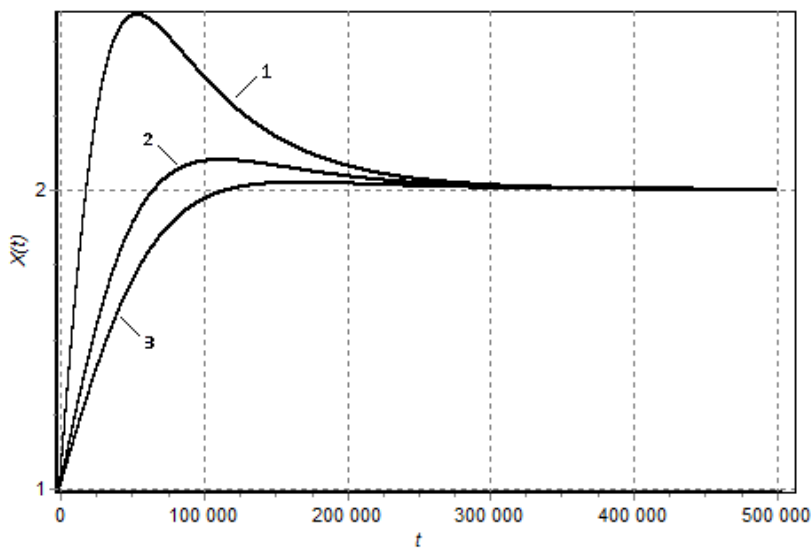


Рис. 4. Изменение $X(t)$ как функции времени при различных значениях C_1 в областях II и III. Параметры модели: $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,1$, $C_1 = 1$ (1), $C_1 = 4$ (2), $C_1 = 8$ (3)

Действительно, для ξ из (20) и рис. 2 видно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\theta}}{\theta} = \frac{\alpha}{2}.$$

Стационарная точка усредненной системы под действием случайного возмущения асимптотически стремится к стационарной точке уравнения Ферхюльста без шумов, которая имеет значение α/β . Полученное решение

для ξ является устойчивым по Ляпунову в силу своей ограниченности. Действительно, параметр θ , стоящий в знаменателе (29), является возрастающей функцией времени, а экспонента – убывающей функцией времени. Два ограниченных множителя и дают в итоге ограниченное, а значит, и устойчивое решение. Возмущение для u носит неустойчивый характер. Однако, несмотря на это, решение для возмущений основного параметра X является ограниченным. Возмущение z при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Иначе говоря, шум стабилизирует систему. Для областей I и IV получаем, что возмущения ξ и z при $t \rightarrow \infty$ являются неограниченными, что соответствует неустойчивому решению СВ-уравнения. Значение дисперсии при этом стремится к бесконечности, а система переходит в максимально хаотическое состояние.

Заключение

Из проведенного анализа СВ-уравнения Ферхюльста следует, что динамика такого уравнения существенным образом зависит от величины дисперсии шума, точнее, от значения параметра Z . При сравнительно небольших значениях этого параметра модель в среднем эволюционирует вблизи значения, которое удовлетворяет невозмущенному уравнению Ферхюльста. Было показано, что все состояния с $Z \neq 0$ оказываются неустойчивыми в общем случае уже в первом порядке теории возмущений, что означает, что очень быстро они переходят в первоначальное невозмущенное состояние. Однако, решив усредненную систему аналитически и проверив ее решение на устойчивость в первом порядке теории возмущений, получили, что возмущения ξ и u являются ограниченными, а решение устойчивым по Ляпунову в силу своей ограниченности. Важным свойством данной системы является возможность ее перехода при $t \rightarrow \infty$ как в детерминированное состояние с дисперсией, равной нулю, так и в состояние с бесконечной дисперсией. Переход в ту или иную область определяется начальными условиями в усредненной системе, для которых были выяснены общие условия перехода в то или иное состояние. Найденные закономерности относятся в целом и к модели затухающего осциллятора с флуктуирующей частотой. Однако для полного анализа свойств этой модели необходимо дополнительное исследование.

Список литературы

1. **Ризниченко, Г. Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии / Г. Ю. Ризниченко. – М. ; Ижевск : Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – Ч. 1. – 231 с.
2. **Арнольд, В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2000. – 32 с.
3. **Монин, А. С.** Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М. : Наука, 1967. – Ч. 1. – 639 с. ; 1969. – Ч. 2. – 720 с.
4. **Журавлев, В. М.** Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем / В. М. Журавлев, В. А. Шляпин // Нелинейный мир. – 2008. – Т. 6, № 7. – С. 352–363.
5. **Журавлев, В. М.** Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии / В. М. Журавлев // Журнал теоретической физики. – 2009. – Т. 79, № 1. – С. 16–27.

6. **Журавлев, В. М.** Прикладная математика и механика / В. М. Журавлев, В. А. Шляпин. – Ульяновск : УлГТУ 2009. – С. 72–88.
7. **Журавлев, В. М.** Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра – Лотки и метод максимальной энтропии / В. М. Журавлев, П. П. Миронов // Нелинейный мир. – 2011. – Т. 9, № 4. – С. 201–212.
8. **Климонтвич, Ю. Л.** Введение в физику открытых систем / Ю. Л. Климонтвич. – М. : Янус-К, 2002. – 284 с.
9. **Фриден, Б. Р.** Оценки, энтропия, правдоподобие / Б. Р. Фриден // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1985. – Vol. 73, № 12. – Р. 78
10. **Стратанович, Р. Л.** Теория информации / Р. Л. Стратанович. – М. : Сов. радио, 1975. – 424 с.
11. **Базыкин, А. Д.** Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – Москва ; Ижевск : ИКИ, 2003. – 368 с.

References

1. Riznichenko G. Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii* [Lectures on mathematical problems in biology]. Moscow ; Izhevsk: Nauchno-izdatel'skiy tsentr «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2002, pt. 1, 231 p.
2. Arnol'd V. I. «Zhestkie» i «myagkie» matematicheskie modeli [Rigid and soft mathematical models]. Moscow: MTsNMO, 2000, 32 p.
3. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidromekhanika* [Statistical hydromechanics]. Moscow: Nauka, 1967, pt. 1, 639 p. ; 1969, pt. 2, 720 p.
4. Zhuravlev V. M., Shlyapin V. A. *Nelineyny mir* [Nonlinear world]. 2008, vol. 6, no. 7, pp. 352–363.
5. Zhuravlev V. M. *Zhurnal teoreticheskoy fiziki* [Theoretical physics journal]. 2009, vol. 79, no. 1, pp. 16–27.
6. Zhuravlev V. M., Shlyapin V. A. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. Ulyanovsk: UIGTU 2009, pp. 72–88.
7. Zhuravlev V. M., Mironov P. P. *Nelineyny mir* [Nonlinear world]. 2011, vol. 9, no. 4, pp. 201–212.
8. Klimontovich Yu. L. *Vvedenie v fiziku otkrytykh sistem* [Introduction into physics of open systems]. Moscow: Yanus-K, 2002, 284 p.
9. Friden B. R. *Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike* [Proceedings of the institute of engineers in electrical engineering and radio electronics]. 1985, vol. 73, no. 12, p. 78.
10. Stratanovich R. L. *Teoriya informatsii* [Theory of information]. Moscow: Sov. radio, 1975, 424 p.
11. Bazykin A. D. *Nelineynaya dinamika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy* [Nonlinear dynamics of interacting populations]. Moscow ; Izhevsk: IKI, 2003, 368 p.

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра теоретической
физики, Ульяновский государственный
университет (г. Ульяновск,
ул. Л. Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, sub-department of theoretical
physics, Ulyanovsk State University
(Ulyanovsk, 42 L. Tolstogo str.)

Миронов Павел Павлович

аспирант, Научно-исследовательский
технологический институт, Ульяновский
государственный университет
(г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42)

E-mail: museum86@mail.ru

Mironov Pavel Pavlovich

Postgraduate student, Research
Technological Institute, Ulyanovsk State
University (Ulyanovsk, 42 L. Tolstogo str.)

УДК 534.04: 536.12: 51-7

Журавлев, В. М.

Динамика случайно возмущенного уравнения Ферхюльста и метод максимальной энтропии / В. М. Журавлев, П. П. Миронов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 156–170.